

• rationalité

$$\int_{x \in \mathbb{C}^n} |f(x)| |dx| \in \mathbb{Q} \quad f, \text{ pol, def, } \dots$$

$$\int_{x \in \mathbb{C}^n} |f(x)|^s |dx| \in \mathbb{Q}(\bar{\mathbb{Q}}^s)$$

• $\mathbb{R}$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \notin \mathbb{Q}$$

$$\int_{|x| \leq 1} |f(x)|^s dx$$

$x \in \mathbb{R}^n$ $\text{Re}(s) \geq 0$

→ par rationalité

méromorphe

et $s \in \mathbb{C}$

pôles

conjugues analogues [Weil conj]

$$N_{m,p,g} = \# \{ x \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^n \mid f(x) \equiv 0 \pmod{p^n} \}$$

un nombre fini de dérivées

$$P(T) = \sum N_m T^m = \frac{\chi(T)}{\eta(T)} \quad \text{p. 9 polynômes}$$

• $\mathbb{Q}_p$

rationalité :

généralisation

stabilité sous intégration

$X \subset \mathbb{A}_p^n$, X définissable
 $(X = \mathbb{A}_p^n)$.

$\mathcal{C}(X)$ est une $\mathbb{Q}$ -algèbre de
 fonctions $X \rightarrow \mathbb{Q}$
 $(0 \leq \text{ord}(x_1) \leq \text{ord}(x_2))$

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x)$$

$$(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x)$$

$$(\lambda \cdot G)(x) = \lambda G(x).$$

généralisée par

$$X \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto |f(x)|$$

f est définissable
 de $X \subset \mathbb{A}_p$.

$$X \rightarrow \mathbb{Q} : x \mapsto \text{ord}(g(x))$$

pour $g: X \rightarrow \mathbb{A}_p^x$
 définissable.

$$F \in \mathcal{C}(X)$$

on écrit

$$x \mapsto \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^{l_i} |f_{ij}(x)| \cdot (\text{ord } g_{ij}(x))$$

$$|f_{ij}(x)| \cdot (\text{ord } g_{ij}(x))$$

f_{ij}, g_{ij} déf.
 langage
 d'anneaux

Thm Stabilité pour $\mathcal{C}$.

(langage
de Moritz
(Q.E.))

Soit F dans $\mathcal{C}(X \times \mathbb{D}_p^n)$

Alors il existe $G \in \mathcal{C}(X)$

$$\text{E.g. } G(x) = \int_{y \in \mathbb{D}_p^n} F(x, y) |dy|$$

si x satisfait que $y \mapsto F(x, y)$
est intégrable sur $\mathbb{D}_p^n$

(extrapolation d'intégrales de $y \mapsto F(x, y)$)

$G \in \mathcal{C}(X)$.

— (on peut aussi ajouter des génératrices
de la forme $|f(x)|^a$ et $\frac{1}{1-p^{a+1}}$)

$$\frac{1-p^{a+1}}{1-p^{a+1}}$$

$a \neq 0$

$$\int_{x \in \mathbb{R}_p} (\text{ord}(x)) \cdot |x| \cdot |dx|$$

cas monomial

? naturel ? nécessaire ?
oui oui

$$\text{ord}(x) = \log_p(|x|)$$

réel :

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \log t \quad t > 1$$

$$t < 1 \quad \int_t^1 \frac{1}{x} \dots = \log t$$

p-adique :

$$\int \frac{1}{|x|} |dx|$$

$$|t| < 1$$

$$|t| < |x| \leq 1$$

(en. $|f(t)|$)

$$\sum_{i=0}^{\text{ord}(t)-1} p^i$$

$$\int \frac{1}{|x|} |dx|$$

$$= \sum_{i=0}^{\text{ord}(t)-1} p^i \cdot p^{-i} \cdot (1 - p^{-1})$$

$$= (1 - p^{-1}) \sum_{i=0}^{\text{ord}(t)-1} 1$$

$$\textcircled{1} = (1 - p^{-1}) \cdot \frac{\text{ord}(t)}{\log_p |t|}$$

(en. $\text{ord}(f(t))$)

esquisse de preuve :

Il suffit de regarder $n = 1$.

par décomposition en cellules + petites transf.

réduit au cas on

$$\int \sum_{i=1}^l T_i(x, y) |dy|$$

$y \in \mathcal{D}$

$$|a(x)| \square_1 |y| \square_2 |b(x)|$$

où $\square_i$ sont $<$ ou vide.

$$T_i(x, y) = c_i(x) \cdot |y|^{\alpha_i} (\text{ord}(y))^{\beta_i}$$

$a(x)$ et $b(x)$ définissables en $x \in X$.
 $c_i \in C(X)$.

$$\sum_{a < j < b} \sum_i p^{-j \cdot \alpha_i} (j)^{\beta_i}$$

$$-j \equiv \text{ord } y$$

$$a \sim \text{ord } a(x)$$

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \beta_i \geq 0 \\ (\alpha_i, \beta_i) \text{ différent} \\ \text{intégrable.} \end{array} \right.$$

les diverses séries géométriques

$$\sum_{a(x) < j} p^{-j} \cdot j$$

$$= \sum_{1+a(x) < j} (p^{-1})^{j-1} \cdot (j-1)$$

$$= \underbrace{\sum_{1+a < j} (\tilde{r}^{-1})^{j-1} \cdot j} - \underbrace{\sum_{1+0 < j} (\tilde{r}^{-1})^j}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\tilde{r}^{-1})^{j-1} \cdot j = \frac{1}{(1 - \tilde{r}^{-1})^2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{a < j} (\tilde{r}^{-1})^{j-1} \cdot j &= \tilde{r}^{-a} \cdot \sum_{0 < j} \tilde{r}^{-(b-1)} \cdot (j+a) \\ &= \tilde{r}^{-a} \left(\underbrace{\sum_{0 < j} \tilde{r}^{-(b-1)} \cdot j}_{\text{dérivée}} + a \cdot \underbrace{\sum_{0 < j} \tilde{r}^{-(b-1)}}_{\text{géom.}} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{a < j < b} \tilde{r}^{-j} \cdot j$$

$$\underbrace{\sum_{a < j} \tilde{r}^{-j} \cdot j - \sum_{b < j} \tilde{r}^{-j} \cdot j}_{\text{OK}} = \underbrace{\sum_{a < j} \tilde{r}^{-j} \cdot j}_{\text{OK}} - \underbrace{\sum_{b < j} \tilde{r}^{-j} \cdot j}_{\text{OK}}$$

$\xrightarrow{x} \mathbb{C}(x)$

Considère $F \in C^0(\mathbb{Q}_p)$

Qu'est qu'on peut dire de $\mathcal{F}(F)$? ou $\in C^0(\mathbb{Q}_p^n)$

défini?
la transformée de Fourier de F .

$$\psi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \exp(2\pi i \cdot x')$$

$$x' \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$$

$$\text{ord}(x' - x) \geq 0$$

$$x' = \frac{a_{-p}}{p^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0$$

ψ bien défini $(x'', \psi(x'') = \psi(x'))$
 $0 \leq a_{-p} \leq p-1$
 $x'' \equiv x' \pmod{\mathbb{Z}}$

$$\psi : \mathbb{Q}_p, + \rightarrow \mathbb{C}^\times, \dots$$

$$\psi(x+y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$$

2. ψ est continue, même localement constante.
 $x \in \mathbb{Q}_p$ $\psi(x + \mathbb{Z}_p) = \psi(x')$
 $x' \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$

$$\psi(x+y) = \psi(x').$$



Caractère additif du groupe $\mathbb{Q}_p, +$. $y \in \mathbb{Q}_p$

lemme (livre d'Yves).

tout caractère de $\mathbb{Q}_p, +$ est de la forme

$$\psi_z : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \psi(z \cdot x)$$

avec $z \in \mathbb{Q}_p$.

En plus, $\psi_z \neq \psi_{z'}$ si $z \neq z'$.

$$\psi_{z+z'} = \psi_z \cdot \psi_{z'}$$



$F : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable

$$\mathcal{F}(F)(z) = \int_{x \in \mathbb{Q}_p} F(x) \cdot \psi_z(x) |dx|$$

$$\mathcal{F}(F)(z) = \int_x F(x) \cdot \psi(z \cdot x) |dx|$$

reel $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabel

$$\mathcal{F}(F)(z) := \int_{x \in \mathbb{R}} F(x) e^{2\pi i x z} dx$$

$$(\mathbb{R}, +)^{\text{dual}} \cong \mathbb{R}, +$$

? $F \in C^0(\mathbb{Q}_p)$, ? $\mathcal{F}(F)$?
Quelle nature ?

